Matemática 3 – Curso 2016

Práctica 6: Estimación puntual

1) Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño *n* tomada de una población X, que $E(X)=\mu$ y $V(X)=\sigma^2$. Sean

$$\overline{X}_1=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Dos estimadores de μ. ¿Cuál es el mejor estimador de μ?. Explique su elección.

2) Sea $X_1, X_2, ..., X_7$ una muestra aleatoria de una población que tiene media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\Theta}_1=\frac{X_1+X_2+......+X_7}{7} \qquad \hat{\Theta}_2=\frac{2X_1-X_6+X_4}{2} \qquad \hat{\Theta}_3=\frac{2X_1-X_7+X_3}{3}$$

a) ¿Alguno de estos estimadores es insesgado?
b) Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.
c) ¿Cuál estimador es el “mejor”?. ¿En qué sentido es mejor?

3) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño *n*.

a) Demuestre que $\overline{X}^2$ es un estimador sesgado de μ^2.
b) Determine la magnitud del sesgo de este estimador.
c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño *n* de la muestra?.

4) El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días se observan: 2 , 5 , 3 , 3 , 7 desconexiones accidentales.

a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ. ¿El estimador es insesgado?, ¿es consistente?
b) Obtenga la estimación de λ a partir de la muestra dada.
c) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encuentre la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.

5) a) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $B(1, p)$. Hallar un estimador de máxima verosimilitud (E.M.V.) de *p*.

b) Se selecciona una muestra aleatoria de *n* chips fabricados por cierta compañía. Sea *X* = el número entre los *n* que tienen defectos y *p* = P(el chip tiene defecto). Supongamos que solo se observa *X* (el número de chips con defectos).

b_1) Si *n* = 100 y *x* = 5, ¿cuál es la estimación de *p*?

b_2) Si *n* = 100 y *x* = 5, ¿cuál es el E.M.V. de la probabilidad $(1-p)^6$, de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?

6) Denotemos por *X* la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y supongamos que la f.d.p. de *X* es:

$$f(x)=\begin{cases}(2\theta+1)x^{2\theta}, & 0\le x\le 1\\ 0, & c.c\end{cases} \qquad \text{donde } \theta>-\frac{1}{2}$$

Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información:

0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.

a) Utilice el método de los momentos para obtener un estimador de θ y luego calcule la estimación para esta información.

b) Obtenga el E.M.V. de θ y luego calcule la estimación para la información dada.

7) Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de momentos. ¿Los estimadores son insesgados?

b) Hallar los estimadores de μ y σ^2 por el método de máxima verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?

c) Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg^2):

392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375.

Si se supone que la resistencia al corte esta normalmente distribuida, estime la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.

d) Estime la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.

8) En una prueba 294 de 300 aisladores cerámicos soportaron cierto choque térmico.

a) Obtenga el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que un aislante cerámico sobrevivirá a un choque térmico.

b) Suponga que un dispositivo contiene tres aislantes cerámicos y todos deben sobrevivir al choque, con la finalidad de que el dispositivo funcione. Encuentre el estimador y la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que los tres sobrevivirán a un choque térmico.

Matemática 3 – Curso 2016

<u>Práctica 7</u>: Intervalos de Confianza

1) Una empresa de material eléctrico fabrica bombitas de luz que tienen una duración distribuida de forma normal, con una desviación estándar de 40 horas.
   a) Si una muestra de 30 bombitas tiene una duración promedio de 780 horas, encuentre un intervalo de confianza de 96% para la media de la población de todas las bombitas que produce esta empresa.
   b) ¿De qué tamaño se necesita una muestra si deseamos tener 96% de confianza de que nuestra media muestral esté dentro de 10 horas de la media real?

2) Se calculan tres intervalos de confianza para la media de la fuerza de corte (en ksi) de pernos de anclaje de un tipo dado, todos de la misma muestra.
   Los intervalos son: (4.01, 6.02) ; (4.20 , 5.83) y (3.57 , 6.46).
   Los niveles de los intervalos son 90%, 95% y 99%. ¿Qué intervalo tiene cada nivel?. Justifique.

3) Un negocio de fotocopiado registra que en n = 64 casos el cartucho de la máquina fotocopiado-ra
   dura un promedio de 18300 copias con una desviación estándar de 2800 copias.
   a) Obtenga un intervalo de confianza del 95 % para la media verdadera μ del número de copias antes de necesitar un nuevo cartucho para la fotocopiadora.
   b) ¿se encuentra μ en el intervalo que obtuvo en la parte a)?, explique.

4) Una muestra aleatoria de 10 barras de chocolate de cierta marca tiene, en promedio, 230 calorías con una desviación estándar de 15 calorías. Construya un intervalo de confianza de 99% para el contenido medio de calorías real de esta marca de barras de chocolate. Suponga que la distribución de las calorías es aproximadamente normal.

5) Se prueban dos fórmulas diferentes de un combustible oxigenado para motor en cuanto al octanaje. La varianza del octanaje para la fórmula 1 es $\sigma_1^2 = 1.5$, mientras que para la fórmula 2 es $\sigma_2^2 = 1.2$. Se prueban dos muestras aleatorias de tamaño $n_1 = 15$ y $n_2 = 20$. Los octanajes promedio observados son $\bar{x}_1 = 89.6$ y $\bar{x}_2 = 92.5$.
   a) Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en el octanaje promedio.
   b) Si tomamos $n_1 = n_2$, ¿qué tamaño de muestra se necesitaría para que la longitud del intervalo se reduzca a la mitad del encontrado en a)?

6) Un ingeniero eléctrico desea comparar las medias de los tiempos de vida de dos tipos de transistores en una aplicación que implica un desarrollo a alta temperatura. Se probó una muestra de 60 transistores del tipo A y se encontró que tenía un promedio de tiempos de vida de 1827 horas y desviación estándar de 168 horas. Se probó una muestra de 180 transistores del tipo B y se encontró que tenía un promedio de tiempos de vida de 1658 horas y desviación estándar de 225 horas. Determine un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las medias de los tiempos de vida de los dos tipos de transistores.

7) Al medir especímenes de hilo de nylon, tomados de dos máquinas de hilado, se descubrió que 8 especímenes de la primera máquina tenían un denier promedio de 9.67 con una desviación estándar de 1.81, en tanto que 10 especímenes de la segunda máquina tenían un denier promedio

de 7.43 con una desviación estándar de 1.48. Si se supone que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza, hallar un intervalo de confianza de nivel 99% para $\mu_1 - \mu_2$.

8) Se está considerando un nuevo proceso de producción para la fabricación de cojinetes de acero inoxidable. Mediciones de los diámetros de muestras aleatorias de cojinetes de viejos y nuevos procesos produjeron los siguientes datos:

Viejo: 16.3 15.9 15.8 16.2 16.1 16.0 15.7 15.8 15.9 16.1 16.3 16.1 15.8 15.7 15.8 15.7

Nuevo: 15.9 16.2 16.0 15.8 16.1 16.1 15.8 16.0 16.2 15.9 15.7 16.2 15.8 15.8 16.2 16.3

Asumiendo que ambas muestras provienen de poblaciones normales, hallar un intervalo de confianza de nivel de 95% para la diferencia de las medias de los diámetros de los cojinetes.

9) Una muestra de 10 camiones diesel fue operada tanto caliente como fría para calcular la diferencia en el ahorro de combustible. Los resultados, en millas/galón, se presentan en la tabla siguiente

Camión	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
caliente	4.56	4.46	6.49	5.37	6.25	5.90	4.12	3.85	4.15	4.69
frío	4.26	4.08	5.83	4.96	5.87	5.32	3.92	3.69	3.74	4.19

Determine un intervalo de confianza de 98% para la diferencia en la media del millaje entre motores calientes y fríos. Asuma que la muestra de las diferencias entre motores calientes y fríos es aproximadamente normal

10) Para los datos del ejercicio 4)

a) construya un intervalo de confianza de 99% para la varianza de calorías real de esta marca de barras de chocolate

b) construya un intervalo de confianza de 99% para la desviación estándar de calorías real de esta marca de barras de chocolate

11) Para los datos del ejercicio 8) hallar un intervalo de confianza de nivel de 95% para el cociente de las varianzas de los diámetros de los cojinetes.

12) Una muestra aleatoria de 300 compradores en un supermercado incluye 204 que regularmente utilizan cupones de descuento. Construya un intervalo de confianza del 98% para la probabilidad de que algún comprador en el supermercado, seleccionado al azar, regularmente usará cupones de descuento.

13) a) Suponga que se quiere estimar qué porcentaje de todos los conductores excede el límite de velocidad de 80 km/h en cierto tramo del camino. ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener al menos 99% de confianza de que el error de su estimación es a lo sumo de 3.5%?.

b) ¿Cómo se vería afectado el tamaño de la muestra requerida, si se sabe que el porcentaje a estimar es a lo sumo de 40%?.

14) En una prueba del efecto de la humedad en conexiones eléctricas, se probaron 100 conexiones eléctricas bajo condiciones húmedas y 150 en condiciones secas. Veinte de las primeras fallaron y solo diez de las segundas no pasaron la prueba. Determine un intervalo de confianza de 90% para la diferencia entre las proporciones de las conexiones que fallaron, húmedas y secas.

Matemática 3 – Curso 2016

<u>Práctica 8</u>: Test de Hipótesis

Para cada uno de los ejercicios, modelice la situación y responda las siguientes preguntas:
a) ¿cuál es la hipótesis nula y cuál es la alternativa?
b) ¿cuál es el estadístico que utiliza y qué distribución tiene bajo H0?
c) ¿cuál es la zona de rechazo? Dibújela.
d) ¿cuál es su conclusión para los datos observados? Recuerde responder en relación al enunciado.
e) ¿Puede dar una idea del p-valor? ¿es exacto o aproximado?

1) Para cada una de las siguientes aseveraciones, exprese si es una hipótesis estadística legítima y por qué:
a) H: $\sigma > 0$ b) H: $s \leq 0.20$ c) H: $\overline{X} - \overline{Y} = 5$ d) H: $\sigma_1 / \sigma_2 < 1$ f) $\mu \leq 0.1$

2) Para los siguientes pares de aseveraciones, indique cuáles no satisfacen las reglas de establecer
hipótesis y por qué:
a) H_0: $\mu = 100$ contra $H_1 : \mu > 100$
b) H_0: $\sigma = 20$ contra $H_1 : \sigma \leq 20$
c) H_0: $p \neq 0.25$ contra H_1 : $p = 0.25$
d) H_0: $p_1 - p_2 = -0.1$ contra H_1: : $p_1 - p_2 < -0.1$

3) Para determinar si las soldaduras de las tuberías en una planta nuclear satisfacen las especificaciones, se selecciona una muestra aleatoria de soldaduras. La resistencia de la soldadura se mide como la fuerza requerida para romperla. Suponga que las especificaciones indican que la resistencia media de las soldaduras deberá exceder de 100lb/pulg^2, el equipo de inspección decide probar H_0: $\mu = 100$ contra $H_1 : \mu > 100$. explique por qué podría ser preferible utilizar esta H_1 en lugar de $\mu < 100$.

4) Sea el estadístico de prueba Z con una distribución normal estándar cuando H_0 es verdadera. Dé el nivel de significancia en cada una de las siguientes situaciones:
a) H_1: $\mu > \mu_0$, región de rechazo $z \geq 1.88$
b) H_1: $\mu < \mu_0$, región de rechazo $z \leq -2.75$
c) H_1: $\mu \neq \mu_0$, región de rechazo $z \geq 2.88$ o $z \leq -2.88$

5) Se supone que una máquina que llena cajas de cereal está calibrada, por lo que la media del peso de llenado es de 340 gr.
Sea μ la media verdadera del peso de llenado. Suponga que en una prueba de hipótesis
H_0: $\mu = 340$ contra H_1: $\mu \neq 340$, el p-valor es 0.30.
a) ¿Se debe rechazar H_0 con base en esta prueba?. Explique
b) ¿Puede concluir que la máquina está calibrada y decir que la media del peso de llenado es de 340 gr?. Explique.

6) Se diseña un programa de tratamiento de aguas residuales para producir agua tratada con pH de 7. Sea μ la media del pH del agua tratada mediante dicho proceso. Se medirá el pH de 25 muestras de agua y se realizará una prueba de hipótesis H_0: $\mu = 7$ contra $H_1 : \mu \neq 7$. Suponga

que se sabe, con base a experimentos previos, que la desviación estándar del pH de las muestras de gua es aproximadamente 0.5 y que se puede asumir que las muestras provienen de una población normal.

a) Si la prueba se hace a un nivel de 5%, ¿cuál es la región de rechazo?

b) Si la media muestra del pH es 6.87, ¿se rechaza H_0 a un nivel de 10%?

c) Si la media muestra del pH es 6.87, ¿se rechaza H_0 a un nivel de 1%?

d) Si el valor 7.2 representa un punto crítico, ¿cuál es el nivel de la prueba?

7) Cuando está operando adecuadamente, una planta química tiene una media de producción diaria de por lo menos 740 toneladas. La producción se mide en una muestra aleatoria simple de 60 días. La muestra tenía una media de 715 toneladas por día y desviación estándar de 24 toneladas por día. Sea μ la media de la producción diaria de la planta. Un ingeniero prueba que H_0: $\mu \geq 740$ contra H_1: $\mu < 740$.

a) Determine el p-valor

b) ¿Piensa que es factible que la planta esté operando adecuadamente o está convencido de que la planta no funciona en forma adecuada?. Explique su razonamiento.

8) Pruebe la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son:

10.2 9.7 10.1 10.3 10.1 9.8 9.9 10.4 10.3 9.8

Utilice un nivel de significancia de 0.01 y suponga que la distribución del contenido es normal.

9) Para determinar el efecto del grado de combustible en la eficiencia del combustible, 80 nuevos automóviles de la misma marca, con motores idénticos, fueron conducidos cada uno durante 1000 millas. Cuarenta de los automóviles funcionaron con combustible regular y otros 40 con combustible de grado Premium; los primeros tenían una media de 27.2 milla/galón, con desviación estándar de 1.2 milla/galón. Los segundos tenían una media de 28.1 milla/galón y una desviación estándar de 2.0 milla/galón. ¿Puede concluir que este tipo de automóvil tiene mejor millaje con combustible Premium? Utilice el p-valor.

10) Se probó la velocidad en cierta aplicación de 50 chips nuevos de computadora, con otra cantidad igual de diseño viejo. La velocidad promedio, en MHz, de los nuevos chips fue de 495.6, y la desviación estándar de 19.4. La velocidad promedio de los chips viejos fue de 481.2, y la desviación estándar fue de 14.3.

a) ¿Se puede concluir que la media de la velocidad de los nuevos es mayor que la de los chips viejos?. Establezca las hipótesis nula y alternativa adecuadas y después encuentre el p-valor.

b) Una muestra de 60 chips aún más viejos tenía velocidad promedio de 391.2 MHz, con desviación estándar de 17.2 MHz. Alguien afirma que los nuevos chips tienen tienen una velocidad promedio mayor a 100 MHz que los más viejos. ¿Los datos proporcionan evidencias convincentes para esta afirmación? . Establezca las hipótesis nula y alternativa y después determine el p-valor.

11) Se considera usar dos marcas diferentes de pintura látex. El tiempo de secado en horas se mide en especímenes de muestras del uso de las dos pinturas. Se seleccionan 15 especímenes de cada una y los tiempos de secado son lo siguientes:

Pintura A:

3.5, 2.7, 3.9, 4.2, 3.6, 2.7, 3.3, 5.2, 4.2, 2.9, 4.4, 5.2, 4.0, 4.1, 3.4

Pintura B:
4.7, 3.9, 4.5, 5.5, 4.0, 5.3, 4.3, 6.0, 5.2, 3.7, 5.5, 6.2, 5.1, 5.4, 4.8

Suponga que el tiempo de secado se distribuye normalmente con $\sigma_A = \sigma_B$, y que ambos tiempos de secado son independientes.

a) Encuentre un intervalo de confianza para la diferencia de las medias $\mu_A - \mu_B$ de nivel 95%.

b) Utilice el intervalo usado en a) para hacer un test para decidir si las medias difieren.

12) Se estudia el flujo de transito en dos intersecciones transitadas entre las 4 P.M. y las 6 P.M. para determinar la posible necesidad de señales de vuelta. Se descubrió que en 21 días laborales hubo en promedio 247.3 automóviles que se aproximaron a la primera intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda, mientras que en 11días laborales hubo en promedio 254.1 automóviles que se aproximaron a la segunda intersección desde el sur y dieron vuelta a la izquierda. Las desviaciones estándar muestrales correspondientes son $s_1 = 15.2$ y $s_2 = 18.7$

Suponga que las distribuciones son normales y que hay independencia entre ambas muestras. Pruebe la hipótesis nula $\mu_1 - \mu_2 = 0$ contra la alternativa $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ con nivel de significan cia $\alpha = 0.01$

13) La directiva de una compañía de taxis está tratando de decidir si debe cambiar de neumáticos normales a neumáticos radiales para mejorar el ahorro de combustible. Se equiparon cada uno de los diez taxis con uno de los dos tipos de neumáticos y se condujeron en una trayectoria de prueba. Sin cambiar de conductores, se seleccionó el tipo de neumáticos y se repitió la trayectoria de prueba. El ahorro de combustible (en milla/galón) para los diez automóviles es:

	Automóvil									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
radial	32.1	36.1	32.3	29.5	34.3	31.9	33.4	34.6	35.2	32.7
normal	27.1	31.5	30.4	26.9	29.9	28.7	30.2	31.8	33.6	29.9

Asuma que la diferencia en ahorro de combustible entre ambos neumáticos es aproximadamente normal.

a) Debido a que el cambio de neumáticos en la flota de taxis es caro, la directiva no quiere cambiar a menos que una prueba de hipótesis proporcione evidencias de que mejorará el millaje. Establezca la hipótesis nula y alternativa adecuadas, y encuentre el p-valor.

b) Un análisis costo-beneficio muestra que será provechoso cambiar a neumáticos radiales si la media de la mejora del millaje es mayor a dos millas /galón. Establezca la hipótesis nula y alternativa adecuadas, y encuentre el p-valor, para una prueba de hipótesis diseñada como base de la decisión de cambiar.

14) El departamento de seguridad de un gran edificio de oficinas quiere probar la hipótesis nula de que $\sigma = 2.0$ minutos para el tiempo que tarda un guardia en realizar su rondín contra la hipótesis alternativa de que $\sigma \neq 2.0$ minutos. ¿Qué se puede concluir con un nivel de significancia de 0.01, si una muestra aleatoria de tamaño $n = 31$ da como resultado $s = 1.8$ minutos?. Asuma que la muestra proviene de una distribución normal.

15) Con referencia al ejercicio 13) use el nivel de significancia de 0.05 para probar la afirmación de que existe una mayor variabilidad en el número de automóviles que dan vuelta a la izquierda aproximándose desde el sur entre 4 P.M. y 6 P.M. en la segunda intersección.

16) Un fabricante de estaciones de trabajo de computadora está probando un nuevo proceso de ensamble automatizado. El proceso actual tiene una tasa de defectos de 5%. En una muestra de 400 estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso, 15 tenían defecto. ¿Se puede concluir que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos?. Calcule el p-valor.

17) En una muestra de 100 lotes de un producto químico comprado al distribuidor A, 70 satisfacen una especificación de pureza. En una muestra de 70 lotes comprada al distribuidor B, 61 satisfacen la especificación. ¿Puede concluir que una proporción mayor de los lotes del distribuidor B satisface la especificación?. Utilice el p-valor.