

PARTE 1 - PROBABILIDAD

1- Probabilidad

1.1 - Espacios muestrales y eventos.

La Teoría de Probabilidades estudia los llamados *experimentos aleatorios*.

Ejemplos clásicos de experimentos aleatorios son los juegos de azar:

- a) tirar un dado y observar el número en la cara de arriba.
- b) tirar una moneda
- c) lanzar una moneda cuatro veces y contar el número total de caras obtenidas.
- d) lanzar una moneda cuatro veces y observar la sucesión de caras y cecas obtenidas.

Simbolizamos con ε a un experimento aleatorio.

Un experimento aleatorio tiene las siguientes características:

1- Se lo puede repetir bajo las mismas condiciones tantas veces como se desee.

2- No se puede predecir con exactitud el resultado de dicho experimento, pero se puede decir cuáles son los posibles resultados del mismo.

3- A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Pero si el experimento se repite un gran número de veces, y registramos la *proporción* de veces que ocurre un determinado resultado, veremos que esa proporción tiende a estabilizarse en un valor determinado a medida que aumenta el número de veces que se repite el experimento.

Por ejemplo, consideremos el experimento de lanzar un dado y observar el número de la cara superior. Supongamos que tiramos el dado N veces, y sea n el número de veces que sale el número 5 en los N tiros del dado. Entonces $\frac{n}{N}$ es la proporción de veces que sale el número 5 en los N tiros.

Si el dado es normal a medida que N aumenta, $\frac{n}{N}$ tiende a estabilizarse en un número que es $1/6$.

Observación: en los experimentos no aleatorios o *deterministas* se puede predecir con exactitud el resultado del experimento, es decir, las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo. Por ejemplo, si colocamos una batería en un circuito simple, el modelo matemático que posiblemente describiría el flujo observable de corriente sería $I = E/R$, que es la ley de Ohm. El modelo predice el valor de I al dar E y R . O sea, si se repite el experimento anterior cierto número de veces, empleando cada vez el mismo circuito, es decir manteniendo fijas E y R , esperaríamos observar el mismo valor de I .

A veces sucede que un experimento no es aleatorio estrictamente, pero resulta mucho más sencillo estudiarlo como si fuera aleatorio. Por ejemplo, si tiramos una moneda y observamos qué lado queda hacia arriba, el resultado sería predecible conociendo en forma precisa las velocidades iniciales de traslación y rotación, y las elasticidades de los materiales del piso y de la moneda. Pero la precisión con la que se necesitan conocer estos datos es casi imposible de obtener en la realidad, por lo que es más conveniente tratar al experimento como aleatorio.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es el *espacio muestral*. Al espacio muestral lo anotamos con la letra S .

Por ejemplo,

- a) Si ε : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba, entonces podemos tomar como espacio muestral a $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
- b) Si ε : tirar una moneda, entonces $S = \{c, s\}$
- c) Si ε : lanzar una moneda tres veces y contar el número total de caras obtenidas entonces podemos considerar $S = \{0,1,2,3\}$
- d) Si ε : lanzar una moneda tres veces y observar la sucesión de caras y cecas obtenidas, entonces $S = \{(c, c, c); (c, c, s); (c, s, c); (s, c, c); (c, s, s); (s, s, c); (c, s, c); (s, s, s)\}$
- e) Si ε : tirar un dado las veces necesarias hasta que sale un 6 por primera vez, y contar el número de tiros realizados, entonces $S = \{1,2,3,4,\dots\} = N$, donde N es el conjunto de los números naturales.
- f) Si ε : medir el tiempo de vida de una lamparita eléctrica, entonces $S = \{t \in R, t \geq 0\}$ donde R es el conjunto de los números reales.

Observaciones:

- 1- la elección de S no es única, depende de lo que se quiera observar del experimento aleatorio.
- 2- El espacio muestral puede ser un conjunto finito, o infinito. A su vez si es infinito puede ser infinito numerable o no numerable. En e) el conjunto S es infinito numerable, en f) el conjunto S es infinito no numerable.

Se llama **evento** o **suceso** a todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo,

- a) En el experimento dado en el ejemplo a), un evento de S sería $A = \{2,4,6\}$ pues $A \subset S$. Podemos expresar al evento A con palabras de la siguiente manera A : “sale un número par”
También $B = \{1,2,3\}$ es un evento al que podemos expresar verbalmente como B : “sale un número menor o igual que 3”
- b) En el experimento dado en el ejemplo d), un evento de S sería $C = \{(c, c, c); (c, c, s); (c, s, c); (s, c, c)\}$, el que en palabras se puede expresar como C : “salen por lo menos dos caras”
- c) En el experimento dado en el ejemplo f), un evento de S sería D : “la lamparita dura más de 1200 horas”, en notación de conjuntos $D = \{t \in R; t > 1200\}$

Observaciones:

- 1- en el ejemplo a) anterior, si al tirar el dado sale el número 2, entonces podemos decir que A **ocurrió** pues $2 \in A$. Pero también B **ocurrió** pues $2 \in B$. En cambio si al tirar el dado sale el número 4, entonces el evento A ocurrió pero B **no ocurrió**, pues $4 \notin B$.
- 2- el conjunto \emptyset es un evento (pues el conjunto \emptyset está incluido en todo conjunto, en particular $\emptyset \subset S$). Es el evento que **nunca ocurre**.
El espacio muestral S es un evento (pues todo conjunto está incluido en sí mismo), y S **siempre ocurre**.

Las operaciones habituales entre conjuntos se pueden aplicar a los eventos, dando como resultado nuevos eventos. Específicamente

- 1- Si A y B son eventos, entonces $A \cup B$ es otro evento. $A \cup B$ ocurre si y solo si ocurre A o si ocurre B
- 2- Si A y B son eventos, entonces $A \cap B$ es otro evento. $A \cap B$ ocurre si y solo si ocurre A y ocurre B

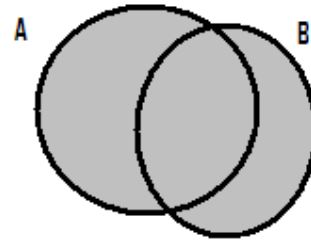
3- Si A es un evento A^C es un evento. A^C ocurre si y solo si no ocurre A

Nota: recordar que las operaciones de unión, intersección diferencia y complemento se definen de la siguiente manera:

1- $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos que están en A o en B (donde el o está en sentido inclusivo), en notación de conjuntos

$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$

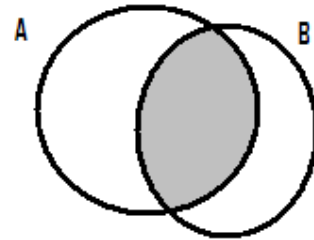
En la figura la zona en gris simboliza $A \cup B$



2- $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos que están en A y en B , en notación de conjuntos

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$

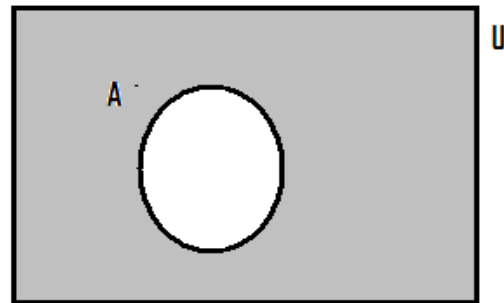
En la figura la zona en gris simboliza $A \cap B$



3- A^C es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto universal U y no están en A , en notación de conjuntos

$$A^C = \{x; x \in U \wedge x \notin A\}$$

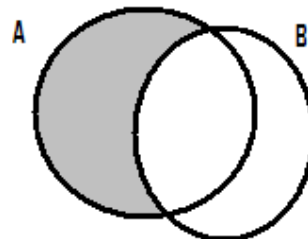
La zona en gris simboliza A^C



4- $A - B$ es el conjunto formado por los elementos que están en A y *no están* en B , en notación de conjuntos $A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$,

La zona en gris simboliza $A - B$

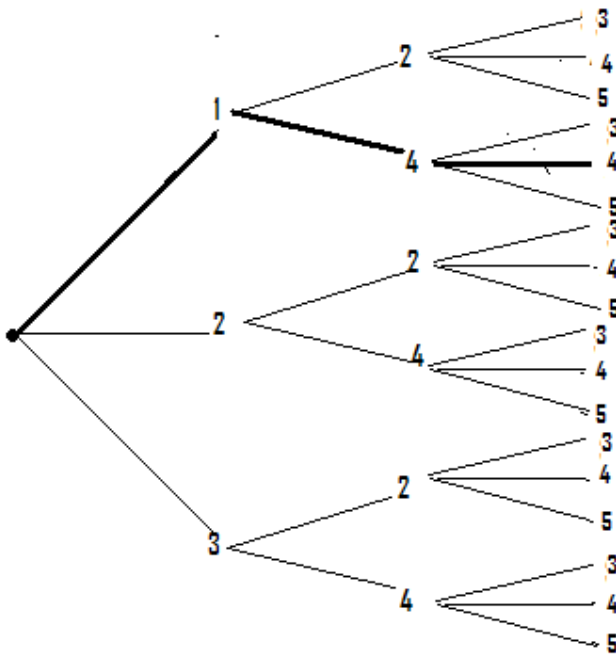
Notar que $A - B = A \cap B^C$



$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, es decir es el conjunto de todas las n -uplas (a_1, a_2, \dots, a_n) donde $a_i \in A_i$ para cada i .

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$, entonces un método conveniente para hallar el producto $A \times B \times C$ es por medio del denominado “diagrama de árbol” que se muestra a continuación, el cual se construye de izquierda a derecha.

$A \times B \times C$ consta de todas las ternas (o 3-uplas) formadas al seguir cada “camino” del árbol



Por ejemplo el camino con trazo más grueso indicaría la terna $(1, 4, 4)$

Las operaciones de unión e intersección también se pueden generalizar a más de dos conjuntos

Si A_1, A_2, \dots, A_n son n conjuntos, entonces

a) la unión de todos ellos se anota $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ o también $\bigcup_{i=1}^n A_i$ y es igual a $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x; \text{ existe } i \text{ tal que } x \in A_i\}$, es decir un elemento x pertenece a $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ si x pertenece **a alguno de los conjuntos** A_i .

De forma análoga se define la unión de una secuencia infinita de conjuntos A_1, A_2, \dots , y se la anota

con el símbolo $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

b) la intersección de todos ellos se anota $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ o también $\bigcap_{i=1}^n A_i$ y es igual a

$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x; x \in A_i \text{ para todo } i\}$, es decir un elemento x pertenece a $\bigcap_{i=1}^n A_i$ si x pertenece **a todos los conjuntos** A_i

De forma análoga se define la intersección de una secuencia infinita de conjuntos A_1, A_2, \dots , y se la anota con el símbolo $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

Si A y B son dos eventos tales que $A \cap B = \emptyset$, se dice que son disjuntos o **mutuamente excluyentes**.

Es decir si A y B son mutuamente excluyentes no pueden ocurrir a la vez. Por ejemplo, si se tira un dado y se observa el número de la cara superior, los eventos $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6\}$ son mutuamente excluyentes. Al tirar un dado sale un número par o un número impar, no pueden darse ambas cosas a la vez.

Los eventos con un solo elemento son eventos **elementales o simples**. Por ejemplo, volviendo al experimento ε : tirar un dado y observar el número en la cara de arriba, y $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, entonces los conjuntos unitarios $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ son eventos simples. Notar que dos eventos simples cualesquiera son mutuamente excluyentes.

Dado un evento A asociado a un experimento aleatorio ε . Supongamos que se repite n veces el experimento ε , y anotamos n_A al número de veces que ocurre A en la n repeticiones de ε . Se define la **frecuencia relativa de A** , y se simboliza f_A , al cociente $\frac{n_A}{n}$. Es decir que f_A es la **proporción de veces que ocurre A en las n repeticiones de ε** .

La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades:

- 1- $0 \leq f_A \leq 1$
- 2- $f_A = 1$ si y solo si A ocurre **cada vez** en las n repeticiones
- 3- $f_A = 0$ si y solo si A no ocurre **nunca** en las n repeticiones
- 4- si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

Dado un evento A , se quiere asignar al mismo un número que indique qué tan **probable** es que A ocurra. A ese número lo definiríamos como la **probabilidad de A** . En ese sentido parecería que la frecuencia relativa f_A sería una buena elección. Pero nos encontramos con el siguiente problema, ¿cuántas veces deberíamos repetir el experimento aleatorio para definir f_A , es decir qué valor de n tomaríamos?

Por ejemplo en el experimento de tirar un dado consideremos el evento A : “sale el número 4”, si lo lanzamos 100 veces podríamos encontrar que $n_A = 14$, y si lo lanzamos nuevamente 100 veces podría ocurrir que n_A sea diferente del anterior por ejemplo podría A ocurrir 20 veces. Entonces, tendríamos dos valores diferentes para f_A , 0.14 y 0.2

Se dijo antes que en un experimento aleatorio a medida que n aumenta la frecuencia relativa de A tiende a estabilizarse en un número, pero no podemos en la práctica repetir el experimento infinitas veces.

Se quiere asignar a cada evento A un número que no dependa de la experimentación. Por este motivo procedemos como sigue:

Definición axiomática de probabilidad.

Sea \mathcal{E} un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado con \mathcal{E} . Con cada evento A asociamos un número real llamado probabilidad de A , que anotamos $P(A)$, el cual satisface las siguientes propiedades básicas o *axiomas*

- 1- $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2- $P(S) = 1$
- 3- Si A y B son eventos mutuamente excluyentes entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 4- Si $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$ es una secuencia de eventos tales que

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j, \text{ entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

La elección de estas propiedades está motivada por las características correspondientes de la frecuencia relativa.

Observación: supongamos el experimento de lanzar una moneda y el espacio muestral $S = \{c, s\}$. Notar que podemos escribir $S = \{c\} \cup \{s\}$, es decir como unión de eventos simples. Por los axiomas 2 y 3 de la definición de probabilidad tenemos que

$$1 = P(S) = P(\{c\}) + P(\{s\})$$

Es decir $1 = P(\{c\}) + P(\{s\})$, lo que implica que $P(\{c\}) = 1 - P(\{s\})$. No podemos deducir el valor de $P(\{c\})$ ni el valor de $P(\{s\})$ de las propiedades anteriores. Necesitamos información adicional, por ejemplo si el dado es normal. De ser así podemos plantear que $P(\{c\}) = P(\{s\})$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} 1 = P(\{c\}) + P(\{s\}) \\ P(\{c\}) = P(\{s\}) \end{array} \right\} \Rightarrow P(\{c\}) = P(\{s\}) = 0.5$$

Podemos deducir de los axiomas otras propiedades útiles para el cálculo de probabilidades.

Propiedades de la probabilidad

1- $P(\emptyset) = 0$

Dem.) Siendo A un evento cualquiera podemos escribir $A \cup \emptyset = A$
 Además A y \emptyset son mutuamente excluyentes, por lo tanto por axioma 3
 $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

O sea que

$$P(A) = P(A) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

2- Si A^c es el evento complementario de A , entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$

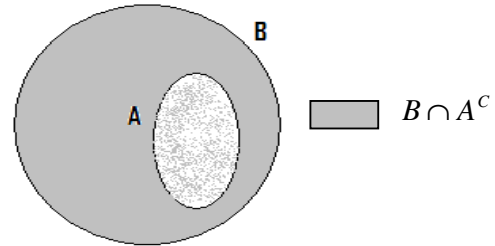
Dem.) Si A es un evento cualquiera, entonces podemos escribir $A \cup A^c = S$
 Además, por definición de complemento de un conjunto, A y A^c son mutuamente excluyentes.
 Por lo tanto, por axioma 2 y por axioma 3

$$1 = P(S) = P(A) + P(A^c)$$

Despejando

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

3- Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$



Dem.) Sean A y B dos eventos tales que $A \subset B$.

De la figura vemos que $B = A \cup (B \cap A^c)$

Y además A y $B \cap A^c$ son mutuamente excluyentes. Entonces

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

Y como por axioma 1 tenemos que $P(B \cap A^c) \geq 0$, entonces $P(B) \geq P(A)$

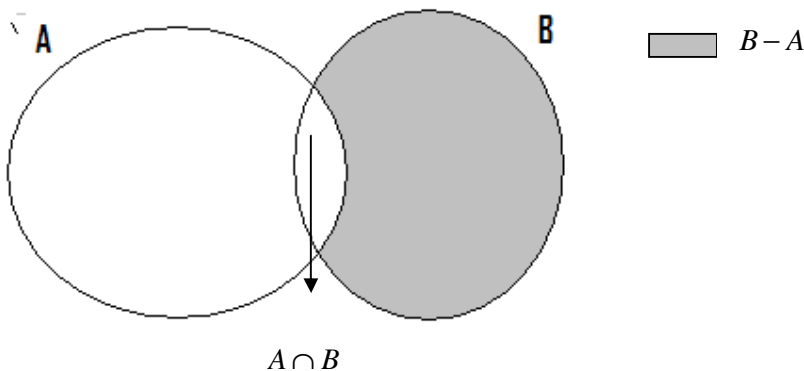
4- Si $A \subset B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$

Dem.) Siguiendo los pasos de la demostración anterior llegamos a

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A^c), \text{ lo que implica que } P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$$

Y como $B \cap A^c = B - A$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Observación: **en general** vale la siguiente propiedad $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$



5- Si A y B son dos eventos **cualquiera**, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dem.) Escribimos a $A \cup B$ como unión de partes disjuntas de la siguiente manera, (observar la figura)

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c) \quad (1)$$



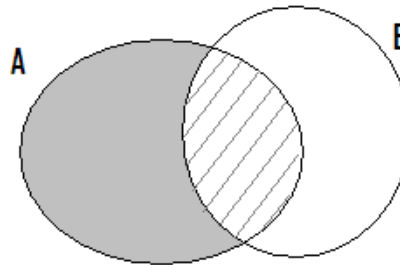
Y por la observación anterior

$$P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \quad (2)$$

Por lo tanto, reemplazando (2) en (1):

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$$

Con lo que queda demostrada la propiedad.



Observaciones:

1- La propiedad anterior se puede generalizar para expresar la probabilidad de tres eventos

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Se llega a la igualdad anterior escribiendo $A \cup B = D$ y aplicando la propiedad 5, es decir:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(D \cup C) = P(D) + P(C) - P(D \cap C) = \\ &= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \quad (3) \end{aligned}$$

Nuevamente aplicamos 5: $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$

Y además, aplicando las leyes distributivas $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Entonces:

$$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))$$

Como $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, reemplazando en (3) se llega a :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

En general, se puede probar que si A_1, A_2, \dots, A_n son n eventos cualesquiera entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

2- Si A_1, A_2, \dots, A_n son n eventos tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Notar que la igualdad anterior es una generalización del axioma 3.

1.2 - El espacio muestral finito

Sea ε un experimento aleatorio y S un espacio muestral asociado a ε . Supongamos que S es un conjunto finito al que anotamos $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, es decir consideramos que tiene n elementos.

Podemos escribir a S como unión de eventos elementales de la siguiente forma.

Si $A_i = \{a_i\}$ entonces $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Además sabemos que $P(S) = 1$, por lo tanto tenemos el resultado:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (4)$$

Es decir: **la suma de las probabilidades de los eventos elementales es igual a 1**

Si ahora tomamos un evento cualquiera B de S , lo anotamos $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, entonces podemos escribir a B como unión de eventos simples: $B = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}$. Por lo tanto

$$P(B) = P(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots + P(A_{i_k})$$

Es decir para calcular la probabilidad de B se suman las probabilidades de los eventos elementales que lo componen.

Si asumimos que $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$, es decir todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir, entonces reemplazando en (4):

$$\underbrace{p + p + \dots + p}_{n \text{ veces } p} = 1 \Rightarrow np = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#S}$$

Donde el símbolo $\#S$ se lee: número de elementos de S , (en general $\#S$ indica el **cardinal** de S)

Cuando $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$, se dice que S es **equiprobable**.

Si B es un evento cualquiera de S , lo anotamos $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$ (o sea que $\#B = k$), entonces escribimos a B como unión de eventos simples: $B = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}$, y nuevamente

$$P(B) = P(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots + P(A_{i_k})$$

Como ya vimos que $P(A_i) = \frac{1}{n}$ para todo $i=1,2,\dots,n$, se tiene que:

$$P(B) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) + \dots + P(A_{i_k}) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{k \text{ veces}} = \frac{k}{n} = \frac{\#B}{\#S}$$

Es decir **si B es un evento de un espacio muestral equiprobable entonces** $P(B) = \frac{\#B}{\#S}$

Ejemplos:

1- Supongamos que se tira una moneda normal tres veces, y se cuenta el número de caras obtenido luego de los tres tiros. Tomemos como espacio muestral a $S = \{0,1,2,3\}$
 ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos dos caras?

En este caso S **no es equiprobable**, pues

el evento $\{0\}$ ocurre de una sola forma: cuando en los tres tiros sale ceca

El evento $\{3\}$ ocurre de una sola forma: cuando en los tres tiros sale cara

Pero el evento $\{1\}$ ocurre cuando en los tres tiros sale una sola cara y eso puede darse de tres formas distintas (c, s, s) ; (s, s, c) o (c, s, c)

Análogamente para el evento $\{2\}$ puede darse de tres formas distintas:

(c, c, s) ; (c, s, c) o (s, c, c)

Por lo tanto $P(\{0\}) = P(\{3\})$ y $P(\{1\}) = P(\{2\})$. Si anotamos $P(\{0\}) = P(\{3\}) = p$ y $P(\{1\}) = P(\{2\}) = q$ entonces $q = 3p$ (5)

Además se cumple $P(\{0\}) + P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = 1$ (6)

Entonces de (5) y (6)

$$\left. \begin{array}{l} q = 3p \\ p + q + q + p = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} q = 3p \\ 2p + 2q = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow p = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{3}{8}$$

De esta forma conocemos las probabilidades de todos los eventos elementales.

Si B : “salen al menos dos caras”, entonces $B = \{2,3\}$

Para calcular $P(B)$ hacemos

$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = 0.5$$

Si tomamos como espacio muestral a

$$S = \{(c, c, c); (c, c, s); (c, s, c); (s, c, c); (c, s, s); (s, s, c); (c, s, c); (s, s, s)\}$$

Entonces S **es equiprobable** pues cada resultado (cada terna) se da de una sola forma.

En este caso **podemos plantear directamente** $P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{4}{8} = 0.5$

2- En el caso de espacios muestrales equiprobables es necesario recordar las **técnicas de conteo** para calcular el número de elementos de un conjunto sin enumerar sus elementos.

Por ejemplo:

Se tiene una urna con 15 bolillas distinguibles (pueden estar numeradas), de las cuales 10 son blancas y 5 son rojas. Se extraen **al azar** dos bolillas de la urna,

- a) ¿cuál es la probabilidad de extraer todas blancas?
- b) ¿cuál es la probabilidad de extraer exactamente una bolilla blanca?
- c) ¿cuál es la probabilidad de extraer al menos una bolilla blanca?

Supongamos que se extraen las dos bolillas **sin reemplazo** y **no importa el orden** en que son extraídas.

Al decir que se extraen al azar, se entiende que el espacio muestral del experimento es equiprobable.

Al decir que se extraen las bolillas sin reemplazo, significa que se extrae una bolilla y sin regresarla a la urna se extrae la siguiente.

El espacio muestral de este experimento se puede tomar como $S = \{\{1,4\}, \{2,5\}, \{2,10\}, \dots\}$, es decir como el conjunto cuyos elementos son conjuntos, todos los conjuntos de dos elementos que se puedan formar a partir de un conjunto de 15 elementos. Por ejemplo, el resultado $\{1,4\}$ significa que se extrajeron las bolillas 1 y 4. ¿Cuántos elementos tiene S ?, recordando las técnicas de conteo el número de elementos de S es igual al número combinatorio $\binom{15}{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!}$

Para responder la pregunta **a)** anotemos A : “las dos bolillas son blancas”

Entonces $P(A) = \frac{\#A}{\#S}$. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A ?, tantos como formas haya de

extraer dos bolillas blancas. Se tiene que $\#A = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!}$.

$$\text{Por lo tanto } P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{\frac{10!}{2!(10-2)!}}{\frac{15!}{2!(15-2)!}} = \frac{3}{7}$$

Veamos ahora el inciso **b)**. Anotamos B : “se extrae exactamente una bolilla blanca”

Entonces

$$P(B) = \frac{\#B}{\#S} = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}}$$

Y por último el inciso **c)**. Anotamos C : “se extrae al menos una bolilla blanca”

Podemos resolverlo de dos maneras:

La forma más fácil es calcular $P(C^c)$ donde C^c : “ninguna bolilla es blanca”

$$P(C^c) = \frac{\#C^c}{\#S} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} \Rightarrow P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}} = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$$

Otra forma de resolverlo podría ser la siguiente, escribimos $C = C_1 \cup C_2$ donde

C_i : “se extraen i bolillas blancas exactamente” $i = 1, 2$

Notar que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Por lo tanto $P(C) = P(C_1) + P(C_2)$

$$\text{Y } P(C_1) = \frac{\#C_1}{\#S} = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}} \quad ; \quad P(C_2) = \frac{\#C_2}{\#S} = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{0}}{\binom{15}{2}}$$

$$\text{Por lo tanto } P(C) = \frac{\binom{10}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{0}}{\binom{15}{2}} = \frac{10}{21} + \frac{9}{21} = \frac{19}{21}$$

3- Si en el ejemplo anterior importa el orden en que son extraídas las bolillas, entonces $S = \{(1,4); (2,5), (2,10), (4,1); (5,2), \dots\}$, es decir que S es el conjunto de todos los **pares** (a,b) donde $a \neq b$, por ejemplo $(1,4)$ expresa el resultado: primero se extrajo la bolilla 1 y en segundo término se extrajo la bolilla 2. El número de elementos de S es $15 \times 14 = 210$.

En este caso

$$P(A) = \frac{10 \times 9}{15 \times 14} = \frac{3}{7};$$

Para calcular la probabilidad de B hay que distinguir si la bolilla blanca se extrae primero o se extrae en segundo término:

$$P(B) = \frac{10 \times 5 + 5 \times 10}{15 \times 14} = \frac{2(10 \times 5)}{15 \times 14}$$

Para calcular la probabilidad de C nuevamente podemos pensarlo de dos formas, pero si consideramos $C = C_1 \cup C_2$ en cada caso hay que tener en cuenta el orden en que se extraen las bolillas.

$$\text{Es más práctico hacer } P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{5 \times 4}{15 \times 14}$$

4- Si ahora **importa el orden** en que son extraídas las bolillas y además la extracción se hace **con re emplazo** (se extrae una bolilla y se la devuelve a la urna antes de extraer la siguiente), entonces S es el conjunto de pares (a,b) donde ahora puede ocurrir que $a = b$.

En este caso $\#S = 15 \times 15$, y calculamos

$$P(A) = \frac{10 \times 10}{15 \times 15} \quad ; \quad P(B) = \frac{10 \times 5 + 5 \times 10}{15 \times 15} = \frac{2(10 \times 5)}{15 \times 15} \quad ; \quad P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{5 \times 5}{15 \times 15}$$

1.3 - Espacios muestrales infinitos

Sea S un espacio muestral **infinito numerable** es decir $S = \{a_1; a_2; a_3; \dots\}$. Como en el caso finito, a cada a_i asignamos un número $p_i = P(\{a_i\})$ tal que

$$a) \quad p_i \geq 0 \quad b) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

La probabilidad $P(A)$ de un evento A es entonces la suma de las probabilidades de los eventos elementales que lo componen.

Los únicos espacios muestrales **infinitos no numerables** que consideraremos son aquellos de medida geométrica finita $m(S)$ tales como longitud, área o volumen, y en los cuales un punto se selecciona al azar. La probabilidad de un evento A , esto es aquella en la que el punto seleccionado pertenece a A , es entonces la relación entre $m(A)$ a $m(S)$, es decir

$$P(A) = \frac{\text{longitud de } A}{\text{longitud de } S} \quad \text{ó} \quad P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} \quad \text{ó} \quad P(A) = \frac{\text{volumen de } A}{\text{volumen de } S}$$

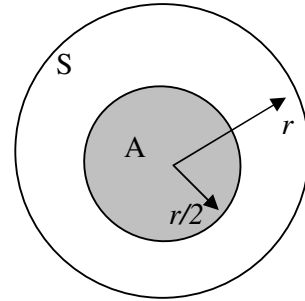
Ejemplo:

En el interior de un círculo se selecciona un punto al azar. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

Tomamos como espacio muestral a $S = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq r^2\}$, entonces

$$A = \left\{ (x, y), x^2 + y^2 \leq \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right\}$$

Por lo tanto
$$P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$



Observación: si $A = \left\{ (x, y), x^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right\}$,

entonces $P(A) = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } S} = \frac{0}{\pi r^2} = 0$, pero $A \neq \emptyset$

Por lo tanto si un evento tiene probabilidad 0 eso no implica que sea el evento vacío.