2 - Probabilidad condicional

2.1- Definición

Supongamos el experimento aleatorio de extraer al azar sin reemplazo dos bolillas de una urna que contiene 7 bolillas rojas y 3 blancas. Asumimos que las bolillas de un mismo color son distinguibles.

Consideramos los eventos A: "la primer bolilla extraída es blanca", y B: "la segunda bolilla extraída es blanca".

El espacio muestral *S* se puede pensar como el conjunto
$S = \{(a,b);\ \ a = 1,2,...10;\ \ b = 1,2,...10;\ \ a \neq b\}$ y $\# S = 10 \times 9$.

Es claro que $P(A) = \frac{3 \times 9}{10 \times 9} = \frac{3}{10}$. Pero si queremos calcular $P(B)$ no es tan directo. Podemos calcular la ***probabilidad de B sabiendo que A ocurrió***: es igual a $\frac{2}{9}$, ya que si *A* ocurrió, entonces en la urna quedaron 9 bolillas de las cuales 2 son blancas. La probabilidad anterior la anotamos $P(B/A)$ y se lee: probabilidad condicional de *B* dado *A*. Es decir $P(B/A) = \frac{2}{9}$.

Notar que podemos interpretar lo anterior de la siguiente forma: el espacio muestral original *S* se ha ***reducido*** al evento *A*, es decir ***se toma a A como nuevo espacio muestral*** para calcular la probabilidad de *B*.

También podemos interpretar que la probabilidad condicional de *B* dado *A* debería ser la proporción de veces que ocurre $A \cap B$ con respecto al número de veces que ocurre *A*. Pensando en términos de frecuencia relativa: $P(B/A) \approx \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$.

Esta idea motiva la siguiente definición:

Sean *A* y *B* dos eventos de un espacio muestral *S*. La probabilidad condicional de *B* dado *A* se define como

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{si } P(A) \neq 0$$

Análogamente

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{si } P(B) \neq 0$$

En algunos casos se puede calcular $P(B/A)$ directamente reduciendo el espacio muestral. En otros será necesario aplicar la definición anterior.

Observación: si *A* y *B* son eventos de un espacio muestral *S* ***equiprobable***, entonces

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\#(A \cap B)}{\# A}$$

Ejemplos:

1- En el experimento de extraer dos bolillas

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3 \times 2}{10 \times 9}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$$

2- Se tira un dado normal dos veces. Sean los eventos A: "la suma de los números obtenidos es 6" y B: "el primer número es igual a 4" Tenemos que $A = \{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}$ y $B = \{(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)\}$ Entonces para calcular $P(A/B)$ mediante la definición de probabilidad condicional

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{6}$$

También podemos calcularlo en forma directa, reduciendo el espacio muestral, de todos los pares del evento B, observamos cuáles cumplen con lo requerido por A, es decir de todos los pares de B, solo uno tiene la propiedad de que sus componentes suman 6, por lo tanto

$$P(A/B) = \frac{1}{6}$$

3- Se lanza una moneda normal tres veces.
Hallar la probabilidad de que salgan todas caras si sale alguna cara.
El espacio muestral reducido es el evento A: "sale alguna cara"
Tenemos que $A = \{(c,c,c);(c,c,s);(c,s,c);(s,c,c);(c,s,s);(s,s,c);(s,c,s)\}$
Y $B = \{(c,c,c)\}$
Por lo tanto $P(B/A) = \frac{1}{7}$

4- En cierta ciudad, 40% de la población tiene cabellos castaños, 25% tiene ojos castaños y 15% tiene cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar
a) si tiene cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos castaños?
b) Si tiene ojos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cabellos castaños?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ni cabellos ni ojos castaños?

Sean los eventos A: "la persona elegida al azar tiene ojos castaños", B: "la persona elegida al azar tiene cabellos castaños"
Entonces $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.15$
a) Se pide calcular $P(A/B)$:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.40}$$

b) $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.25}$

c) $P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0.25 + 0.40 - 0.15)$

5- Sean los eventos A y B con $P(A) = 0.5$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

Hallar: a) $P(A/B)$, b) $P(B/A)$, c) $P(A\cup B)$, d) $P(A^C/B^C)$, e) $P(B^C/A^C)$

a) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$ b) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{12}$

d) $P(A^C/B^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}$

Calculamos: $P(B^C)=1-P(B)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$;

$$P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

Por la ley de De Morgan

Entonces $P(A^C/B^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{15}{24}=\dfrac{5}{8}$

e) $P(B^C/A^C)=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{P(A^C)}=\dfrac{P(A^C\cap B^C)}{1-P(A)}=\dfrac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{6}$

Observaciones:

a) Si $A\subset B$ entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(A)}=1$

b) Si $A\cap B=\varnothing$ entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{P(\varnothing)}{P(A)}=0$

c) Es fácil comprobar que $P(B(/A)$ para A fijo, satisface los axiomas de la probabilidad, esto es:

1- $0\le P(B/A)\le 1$

2- $P(S/A)=1$

3-Si B_1 y B_2 son eventos mutuamente excluyentes entonces

$$P\big((B_1\cup B_2)/A\big)=P(B_1/A)+P(B_2/A)$$

4-Si $B_1,B_2,...,B_n,B_{n+1},...$ es una secuencia de eventos tales que $B_i\cap B_j=\varnothing$ si $i\neq j$ entonces

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)/A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i/A)$$

Teorema de la multiplicación

Si A y B son dos eventos entonces $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ si $P(A)\neq 0$

Por lo tanto

$$P(A\cap B)=P(B/A)\,P(A) \qquad (6)$$

Análogamente de $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ si $P(B)\neq 0$, se deduce

$$P(A\cap B)=P(A/B)\,P(B) \qquad (7)$$

(6)y (7) se conocen como ***teorema de la multiplicación***.

Consideremos otra vez el ejemplo de extraer dos bolillas al azar sin reemplazo de una urna que contiene 3 bolillas blancas y 7 rojas. Si A: "la primer bolilla extraída es blanca", y B: "la segunda bolilla extraída es blanca", entonces

$$P(A\cap B)=P(A)P(B/A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}$$

Si A_1, A_2, A_3 son tres eventos entonces

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)$$

pues:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)\underbrace{=}_{B=A_1\cap A_2}P(B\cap A_3)\underbrace{=}_{\text{Teorema de la multiplicación}}P(B)P(A_3/B)=P(A_1\cap A_2)P(A_3/A_1\cap A_{23})=$$

$$\underbrace{=}_{\text{Teorema de la multiplicación}}P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)$$

El teorema de la multiplicación se puede generalizar a n eventos $A_1, A_2,\dots, A_n$:

$$P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\dots.P(A_n/A_1\cap A_2\cap\dots,A_{n-1}) \qquad (8)$$

Ejemplos:

1- Una clase tiene 12 niños y 4 niñas. Si se escogen tres estudiantes de la clase al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean todos niños?

Solución:

Anotamos A_i : "el i-ésimo estudiante elegido es un niño" $i=1,2,3$

Entonces la probabilidad pedida es

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)=\frac{12}{16}\times\frac{11}{15}\times\frac{10}{14}$$

2- Los estudiantes de una clase se escogen al azar, uno tras otro, para presentar un examen.
   a) Si la clase consta de 4 niños y 3 niñas, ¿cuál es la probabilidad de que niños y niñas queden alternados?
   b) Si la clase consta de 3 niños y 3 niñas, ¿cuál es la probabilidad de que niños y niñas queden alternados?

Solución:

a) Nuevamente anotamos A_i : "el i-ésimo estudiante elegido es un niño"

Entonces la probabilidad pedida es, aplicando (8):

$$P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5 \cap A_6^C \cap A_7) = \frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{35}$$

b) Hay dos casos mutuamente excluyentes: el primer estudiante es un niño, y el primero es una niña.
Si el primero es un niño, entonces por (8) la probabilidad de que los estudiantes se alternen es

$$P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3 \cap A_4^C \cap A_5 \cap A_6^C) = \frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Si el primero es una niña, entonces por (8) la probabilidad de que los estudiantes se alternen es

$$P(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C \cap A_4 \cap A_5^C \cap A_6) = \frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = \frac{1}{20}$$

Entonces la probabilidad pedida es $\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10}$

En el ejemplo inicial de extraer dos bolillas de una urna, todavía queda por resolver cómo calculamos la $P(B)$, siendo *A*: "la primer bolilla extraída es blanca", y *B*: "la segunda bolilla extraída es blanca"

Podemos expresar al espacio muestral *S* como $S = A \cup A^C$
Además *A* y A^C son mutuamente excluyentes.
Por otro lado podemos escribir
$B = B \cap S = B \cap \left(A \cup A^C\right) = \left(B \cap A\right) \cup \left(B \cap A^C\right)$ por la ley distributiva
Entonces
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(B/A)P(A) + P(B/A^C)P(A^C)$

$\left(B \cap A\right) \cap \left(B \cap A^C\right) = \varnothing$ teorema de la multiplicación

Lo hecho en este ejemplo se generaliza en el siguiente teorema

2.2 - Teorema de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ eventos de un espacio muestral *S* que cumplen:

a) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = S$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$

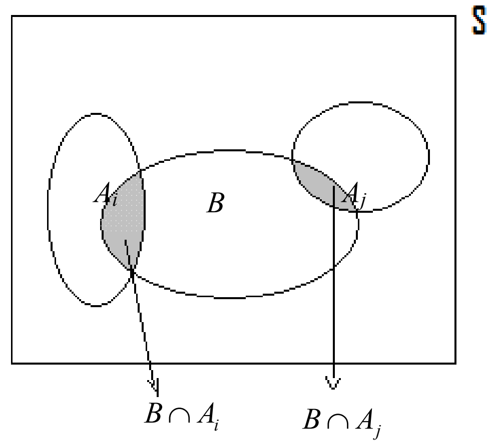
c) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1,2,...,n$ Se dice que $A_1, A_2, ..., A_n$ forman una ***partición de S*** Entonces para cualquier evento *B* de *S*

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n)$$

Dem.) Podemos escribir

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

Ley distributiva de la $\cap$ con respecto a la $\cup$



Además si $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$, entonces $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ si $i \neq j$ (ver figura)

Por lo tanto $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n) =$

Teorema de la multiplicación

$$= P(B / A_1)P(A_1) + P(B / A_2)P(A_2) + \ldots + P(B / A_n)P(A_n)$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral S que cumplen:

a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$

b) $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

c) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Entonces para cualquier evento B de S tal que $P(B) > 0$

$$P(A_k / B) = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)} \qquad k = 1, \ldots, n$$

Dem.)

$$P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B / A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B / A_i)P(A_i)}$$

def. de prob. Condicional teor, de la probabilidad total

teor. de multiplicación

Ejemplos:

1- Tres máquinas A, B, y C producen respectivamente 60%, 30% y 10% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son respectivamente 2%, 3% y 4%. Se selecciona un artículo al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b) Si al seleccionar un artículo al azar resulta defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el artículo hubiera sido producido por la máquina C?

Solución:

a) Sean los eventos

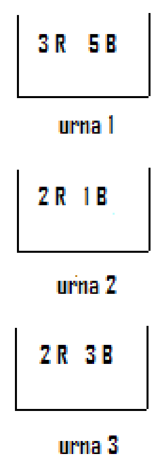
A: "el artículo seleccionado fue producido por la máquina A"
B: "el artículo seleccionado fue producido por la máquina B"
C: "el artículo seleccionado fue producido por la máquina C"
D: "el artículo seleccionado es defectuoso"

Los datos que tenemos son los siguientes
$P(A)=0.6 \quad P(B)=0.3 \quad P(C)=0.1 \quad P(D/A)=0.02 \quad P(D/B)=0.03 \quad P(D/C)=0.04$
Se pide hallar la $P(D)$.
Se aplica el teorema de la probabilidad total tomando como partición de *S* a los eventos *A*, *B* y *C*.
Entonces
$$P(D)=P(D/A)P(A)+P(D/B)P(B)+P(D/C)P(C)=0.02\times 0.6+0.03\times 0.3+0.04\times 0.1$$

b) Se pide hallar $P(C/D)$. Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D/C)P(C)}{P(D)}=\frac{0.04\times 0.1}{0.02\times 0.6+0.03\times 0.3+0.04\times 0.1}=\frac{4}{25}$$

2- Se nos dan tres urnas como sigue:
Una urna 1 contiene 3 bolas rojas y 5 blancas.
Una urna 2 contiene 2 bolas rojas y 1 blanca.
Una urna 3 contiene 2 bolas rojas y 3 blancas
Se selecciona una urna al azar y se saca una bola de la urna. Si la bola es roja, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna 1?



Solución:
Sean los eventos A_i: "se elige la urna *i*" $i = 1, 2, 3$
Entonces $P(A_i)=1/3 \quad i=1,2,3$
Además podemos tomar a A_1, A_2, A_3 como una partición del espacio muestral *S.*
Sea el evento B :"extraer bolilla roja"
Se pide calcular $P(A_1/B)$
Entonces

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A_1)P(A_1)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+P(B/A_3)P(A_3)}=$$

def. de prob. condicional

Teorema de Bayes

$$=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{45}{173}$$

2.3 - Independencia

Dados dos eventos A y B , puede ocurrir que $P(B/A)$ y $P(B)$ sean diferentes, eso significa que saber que A ocurrió modifica la probabilidad de ocurrencia de B

En el ejemplo anterior $P(B/A_1)=\dfrac{3}{8}\neq P(B)=\dfrac{173}{360}$

Pero puede suceder que $P(B/A)$ y $P(B)$ sean iguales, en ese caso A y B son eventos independientes, saber que A ocurrió no afecta la probabilidad de ocurrencia de B.

Entonces, dos eventos A y B son ***independientes*** si $P(B/A)=P(B)$, y son ***dependientes*** de otro modo.

Notar que por el teorema de la multiplicación $P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$ si $P(A)>0$
Entonces
A y B son independientes $\Rightarrow P(A\cap B)=P(B/A)P(A)=P(B)P(A)$
Recíprocamente
Si $P(A\cap B)=P(B)P(A)$ entonces

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}\underset{\text{si } P(A)>0}{=}P(B) \qquad \therefore \qquad A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Por lo tanto:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes si y solo si } P(A\cap B)=P(A)P(B) \qquad (9)$$

Es decir podemos usar (9) como definición de independencia de eventos.

Ejemplos:

1-Se tira un dado normal dos veces, sean los eventos
A: "la suma de los números obtenidos es igual a 7"
B: "el primer número obtenido es 4"
¿Son A y B independientes?

Sabemos que el espacio muestral es el conjunto de 36 pares ordenados (a,b) donde tanto a como b pueden tomar los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Además $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ y $B=\{(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)\}$
Entonces

$$P(A\cap B)=\frac{1}{36} \qquad P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6} \qquad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Como $P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}=P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}$ entonces A y B son independientes

Observación: si A fuera el evento A: "la suma de los números obtenidos es igual a 6", entonces A y B son dependientes

2-Se tiene una urna con 10 bolillas blancas y 5 rojas. Se extraen al azar dos bolillas ***con reemplazo*** de la urna. Entonces los eventos
A: "la primer bolilla es blanca"
B: "la segunda bolilla es roja"
Son independientes

$$P(A \cap B) = \frac{10 \times 5}{15 \times 15} \qquad P(A) = \frac{10 \times 15}{15 \times 15} = \frac{10}{15} \qquad P(B) = \frac{5 \times 15}{15 \times 15} = \frac{5}{15}$$

Pero si la extracción se hace ***sin reemplazo***, entonces A y B son ***dependientes*** pues

$$P(A \cap B) = P(B / A)P(A) = \frac{5}{14} \times \frac{10}{15} \qquad P(A) = \frac{10}{15}$$

y $P(B) = P(B / A)P(A) + P(B / A^C)P(A^C) = \frac{5}{14} \times \frac{10}{15} + \frac{4}{14} \times \frac{5}{15} = \frac{5}{15}$

por lo tanto $P(A \cap B) \neq P(B)P(A)$

Notar que la diferencia está en que $P(B / A) = \frac{5}{14} \neq P(B) = \frac{5}{15}$

Observación: si en el ejemplo anterior la urna tiene 1000 bolillas blancas y 500 rojas, y se extraen ***sin reemplazo*** dos bolillas al azar entonces

$$P(B / A) = \frac{500}{1499} = 0.3335557... \qquad y \qquad P(B) = \frac{5}{15} = 0.3333333...$$

O sea que $P(B / A)$ y $P(B)$ son ***casi*** iguales.

Por lo tanto podemos asumir que A y B son independientes, aunque la extracción se haga sin reemplazo.

En la práctica, si N es el tamaño de la población y n el tamaño de la muestra extraída sin reemplazo, si $\frac{n}{N} < 0.05$ entonces podemos operar como si la extracción se hubiera hecho con reemplazo.

Si dos eventos A y B son independientes entonces A y B^C son independientes (10)

Dem.) se debe probar que $P(A \cap B^C) = P(A)P(B^C)$

Para esto escribimos

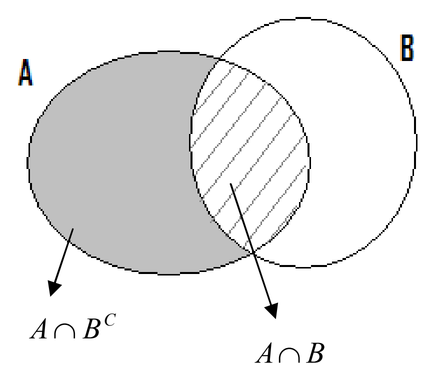
$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

Como $A \cap B$ y $A \cap B^C$ son mutuamente excluyentes entonces

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) \underset{A \text{ y } B \text{ independientes}}{=} P(A) - P(A)P(B) =$$

$$= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^C)$$



Con lo que queda demostrada la propiedad.

Observación: si A y B son eventos independientes, entonces A^C y B^C son independientes. Se llega a este resultado aplicando (10) sobre A y B, y luego se aplica (10) nuevamente a A y B^C.

Independencia de más de dos eventos.

La noción de independencia de eventos se puede ampliar a n eventos de la siguiente manera:

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, se dice que son ***independientes*** si

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \qquad k = 2,\ldots,n \qquad (11)$$

Observaciones:

1- si $n = 2$ entonces (11) se reduce a la definición de dos eventos independientes.
2- si $n = 3$ entonces (11) significa que se deben cumplir las siguientes 4 condiciones:

a) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$
b) $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$
c) $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$
d) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

La condición d) significa que un evento es independiente de la intersección de los otros dos, por ejemplo $P(A_1 / A_2 \cap A_3) = P(A_1)$

Esto es porque en general por el teorema de la multiplicación vale que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

y por d)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

entonces

$$P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \Rightarrow P(A_3 / A_1 \cap A_2) = P(A_3)$$

Ejemplos:

1- Las probabilidades de que tres hombres peguen en el blanco son, respectivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{3}$.

Cada uno dispara una vez al blanco.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de ellos pegue en el blanco?
b) Si solamente uno pega en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que sea el primer hombre?

Solución:
a) consideremos los eventos A_i: "el hombre i-ésimo pega en el blanco" $i = 1, 2, 3$

$$P(A_1) = \frac{1}{6} \qquad P(A_2) = \frac{1}{4} \qquad P(A_3) = \frac{1}{3}$$

Sea el evento B: "exactamente un hombre pega en el blanco"

Entonces $B = \left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3\right) \cup \left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C\right) \cup \left(A \cap A_2^C \cap A_3^C\right)$

Por lo tanto $P(B) = P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3\right) + P\left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3^C\right) + P\left(A \cap A_2^C \cap A_3^C\right)$

Y por independencia $P(B) = P\left(A_1^C\right)P(A_2^C)P(A_3\right) + P\left(A_1^C)P(A_2)P)(A_3^C\right) + P\left(A_1)P(A_2^C)P)(A_3^C\right) =$

$$= \left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3} + \left(1-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{31}{72}$$

b) Se pide calcular $P(A_1 / B)$

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap A_2^C \cap A_3^C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}$$

2- Cierto tipo de proyectil da en el blanco con probabilidad 0.3, ¿ cuántos proyectiles deberán ser disparados para que haya al menos un 80% de probabilidad de pegar en el blanco?

Solución:
Escribimos A_i: "el proyectil i-ésimo da en el blanco" $i = 1, 2, \dots, n$
Se quiere que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) > 0.8$$

Asumiendo independencia esto es equivalente a

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^C\right) = 1 - P({A_1}^C \cap {A_2}^C \cap \ldots \cap {A_n}^C) =$$
$$= 1 - P({A_1}^C)P({A_2}^C)\ldots P({A_n}^C)) = 1 - 0.7^n > 0.8$$

Por lo tanto $0.7^n < 0.2 \;\Rightarrow\; n\ln(0.7) < \ln(0.2) \;\Rightarrow\; n > \dfrac{\ln(0.2)}{\ln(0.7)} = 4.5123$

Es decir se deben hacer por lo menos 5 disparos